

曲线方程与性质

圆锥曲线的方程与性质

曲线	椭圆	双曲线	抛物线
定义	平面上动点 P 与两定点 F_1, F_2 距离之和为常数 $ PF_1 + PF_2 = 2a$	平面上动点 P 与两定点 F_1, F_2 距离之差为常数 $ PF_1 - PF_2 = 2a$	平面上动点到一定点 F 和一定直线 l 的距离相等.
方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$y^2 = 2px$
图示			
轴长	短轴长 = $2b$ 长轴长 = $2a$	虚轴长 = $2b$ 实轴长 = $2a$	
离心率	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} (0 < e < 1)$	$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} (1 < e)$	$e = 1$
通径	过曲线焦点且垂直于对称轴的弦长 $ AB = \frac{2b^2}{a}$ (最短焦点弦)		过抛物线焦点且垂直于对称轴的弦 $ AB = 2P$ (最短焦点弦)

抛物线焦点弦拓展——阿基米德三角形

如图, $\triangle AHB$ 称为阿基米德三角形. 设: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 中点 $G(x_0, y_0)$, 直线 $AB: x = ty + \frac{p}{2}$. 则:

(1) 由抛物线定义知: $|AF| = |AN| = x_1 + \frac{p}{2}$, 即: $|AF| = x_1 + \frac{p}{2}$, 该表达式称抛物线焦半径.

推论: ① 同理有: $|BF| = x_2 + \frac{p}{2}$, $|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + p = 2(x_0 + \frac{p}{2})$

② 直曲联立: $\begin{cases} x = ty + \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2pty - p^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 y_2 = -\frac{p^2}{4} \\ x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} \end{cases}$

③ $\because G$ 到准线距离 $d = x_0 + \frac{p}{2} = \frac{1}{2}|AB|$, 可知: 以 AB 为直径的圆与准线 l 相切

④ $\angle HAG = \angle AHG \Rightarrow \begin{cases} \triangle ANH \cong \triangle AHF \Rightarrow FH \perp AB \\ GH \parallel AN \parallel SB \parallel x \text{ 轴} \end{cases}$

⑤ HA, HB 为抛物线的两条切线

(2) 设直线 AB 的倾斜角为 α , 则有: $|AF| = \frac{p}{1 - \cos \alpha}, |BF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$ (长减短加)

① $|AB| = |AF| + |BF| = \frac{2p}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2p}{\sin^2 \alpha} = 2p(1 + \frac{1}{k^2})$

② $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{1 - \cos \alpha}{p} + \frac{1 + \cos \alpha}{p} = \frac{2}{p}$

